Théorème de Bernstein-Valiron

Rappel : Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage de a on a le développement de Taylor suivant :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)f'(a)}{1!} + ... + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} \mathrm{d}t$$

Théorème : Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que pour tout $k \leq 0$, $f^{(2k)} \geq 0$. Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Application : L'application tangente est développable en série entière sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Preuve du théorème : Soit $0 < b < a$. On commence par montrer que f est DSE sur $]-b, b[$. Soit $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$. On montre aisément que F est paire. De plus elle est $\mathcal{C}^\infty$ donc $f^{(2k+1)} = 0$ pour tout k. En utilisant la formule de Taylor il vient alors

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2 F^{(2)}(0)}{2} + ... + \frac{x^{2n} F^{(2n)}(0)}{(2n)!} + \int_0^x \frac{x^{2n} F^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} \mathrm{d}t$$

et on note $R_n(x)$ le reste intégral dans la suite et $P_n(x)$ le reste des termes. Comme $F^{(2k)} = 2f^{(2k)} \geq 0$, $P_n(x) \geq$. Il en résulte donc que $F(b) \geq R_n(b)$. Soit $x \in [0, b[$ et montrons que $R_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. On a

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{2n} (b-t)^{2n} \frac{F^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} \mathrm{d}t \\ &\leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n} R_n(b) \leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n} F(b) \text{ car } t \mapsto \frac{x-t}{b-t} \text{ est décroissante et vaut } \frac{x}{b} \text{ en } 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $R_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ ce qui permet de dire que la série de Taylor converge et donc $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} F^{(2k)}(0)}{(2k)!}$ pour tout $x \in [0, b[$. Comme F est paire on a en fait montré le résultat sur $]-b, b[$. Retournons vers f.

Soit $x \in]-b, b[$. On peut écrire le développement de Taylor reste intégral de la même manière, à la différence près que les termes impairs ne valent pas tous 0. On note $r_n(x)$ le reste intégral et $p_n(x)$ la somme partielle de f (à ne pas confondre avec les notations de F). On a déjà dit que $F^{(2n)} = 2f^{(2n)}$ donc avec l'hypothèse de positivité il vient $F^{(2n)} \geq f^{(2n)}$ et donc en remplaçant dans les restes on trouve $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$. Avec le même raisonnement que pour F on vient de montrer que la suite $(p_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers f. On ne peut cependant pas en conclure le résultat, la convergence d'une suite extraite n'impliquant pas la convergence de la suite globale.

Mais on a $p_{2n}(x) - p_{2n-1}(x) = \dfrac{F^{(2n)}(0) x^{2n}}{2(2n)!}$ qui tend vers 0 par ce que l'on a fait précédemment donc on a bien le résultat voulu ! $\square$

Preuve de l'application : On utilise le théorème avec $f := \tan' = 1 + \tan^2$. Je n'ai pas la foi d'écrire la preuve mais on utilise juste le théorème de Leibniz pour montrer par récurrence que toutes les dérivées de f sont positives, ce qui permet d'utiliser le théorème.

$$f^{(n)} = (1 + \tan^2)^{(n)} = (\tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(n-k)} \tan^{(k)}.\square$$

Remarques importantes :

- C'est potentiellement cours donc n'allez pas trop vite !
- La preuve de cette formule de Taylor n'a rien de compliqué, ce sont juste des IPP successives, donc soyez au point là dessus, le jury peut être déçu dans le cas contraire...